

Кинематика



Путь, перемещение, средняя скорость



$v = l/t$ — средняя скорость движения.

$\vec{v}_{cps} = \frac{\vec{S}}{t}$ — средняя скорость перемещения.

Определение средней скорости

Задача 1. Пешеход прошел весь путь в одном направлении со средней скоростью 6 км/ч. Первую треть пути он шел со скоростью v , а оставшийся путь со скоростью на 2 км/ч меньшей. Определите среднюю скорость на первом участке пути.

Решение.

$$v_{cp} = \frac{L}{t} \quad t = t_1 + t_2 = \frac{L}{3v_1} + \frac{2L}{3(v_1 - \Delta v)}$$

$$v_{cp} = \frac{3v_1(v_1 - \Delta v_1)}{2v_1 - \Delta v}$$

$$v_1^2 - 2v_1v_{cp} + \frac{1}{3}v_{cp}\Delta v = 0 \quad v_{1,2} = \frac{2v_1 \pm \sqrt{D}}{2} = 4 \pm 3,5 \text{ (км/ч)}.$$

Классический закон сложения скоростей

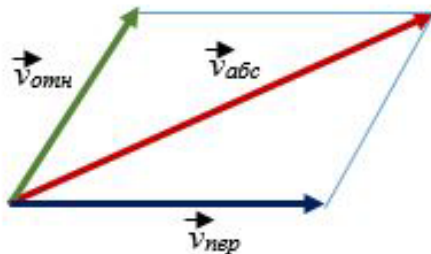
$$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}$$

$\vec{v}_{абс}$ – абсолютная скорость, скорость тела относительно неподвижной системы отсчета

$\vec{v}_{отн}$ – относительная скорость, скорость тела относительно подвижной системы отсчета;

$\vec{v}_{пер}$ – переносная скорость, скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной.

Абсолютная скорость тела равна геометрической сумме векторов относительной и переносной скоростей.



Относительность движения

Задача 2. Два автомобиля подъезжают к развилке дороги со скоростями 72 и 54 км/ч и разъезжаются по двум дорогам, угол между которыми 60° . Определите скорость второго автомобиля относительно первого 1) до развилки; 2) после развилки.

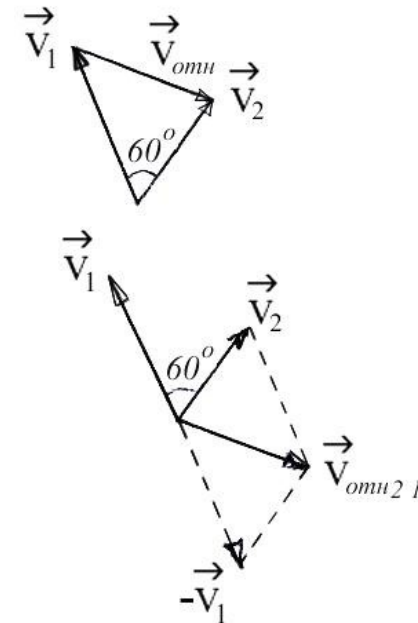
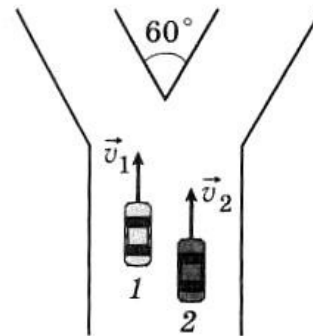
Решение.

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{\text{отн}2}$$

$$\vec{v}_{\text{отн}2} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$v_{\text{отн}2}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha$$

$$v_{\text{отн}2} = 18 \text{ м/с.}$$



Задача 3. На лодке рыбак переправляется на другой берег. Скорость лодки в стоячей воде $v_{\text{л}} = 4$ м/с, скорость течения реки $v_{\text{р}} = 2$ м/с, ширина реки $l = 240$ м. Определите: 1) за какое минимальное время рыбак может переправиться на другой берег; 2) под каким углом рыбак должен направлять лодку, чтобы проехать при переправе минимальное расстояние и каково будет время переправы в этом случае?

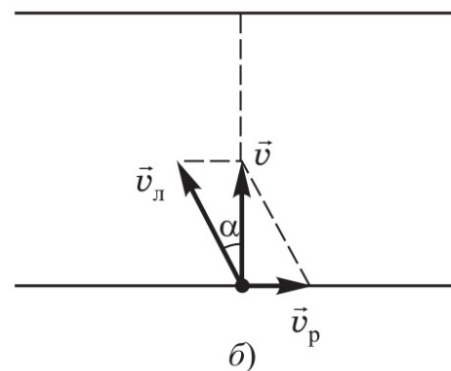
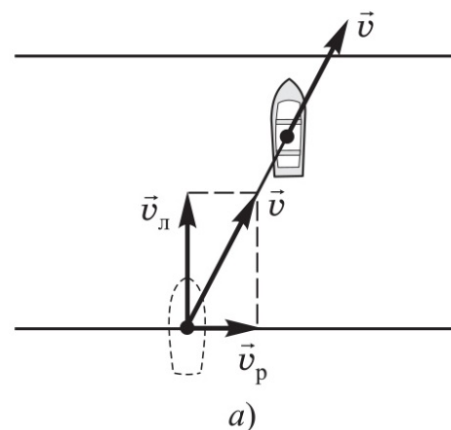
Решение.

$$1) t_{\min} = \frac{l}{v_{\text{л}}} = 60 \text{ с} \quad x = v_{0x}t = v_0 t \cos\alpha,$$

$$2) \vec{v} = \vec{v}_{\text{л}} + \vec{v}_{\text{р}}$$

$$v_{\text{р}} / v_{\text{л}} = \sin\alpha = 0,5 \quad \alpha = 30^\circ$$

$$t = l / \sqrt{v_{\text{л}}^2 - v_{\text{р}}^2} = 70 \text{ с}$$



Задача 4. Товарный поезд длиной 650 м и скорый поезд длиной 150 м идут по параллельным путям в одном направлении со скоростями 12 м/с и 30 м/с. Определите в течение какого времени скорый поезд обгонит товарный?

Решение.

$$v_{\text{отн}} = v_2 - v_1$$

$$L = L_1 + L_2$$

$$t = \frac{L_1 + L_2}{v_2 - v_1}$$

Задача 5. Капли воды на лобовом стекле машины, движущейся со скоростью 36 км/ч поднимаются со скоростью 2 м/с. Угол наклона стекла 60° .

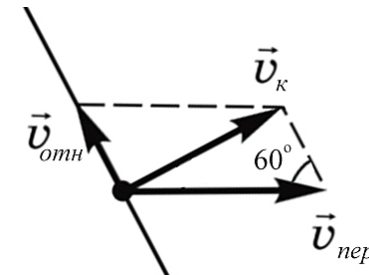
Определите скорость капель относительно дороги.

Решение.

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}$$

$v_{\text{отн}}$ – скорость капель относительно стекла;

$v_{\text{пер}}$ – скорость автомобиля.



Уравнения движения

Равномерное движение

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

Прямолинейное движение вдоль оси ОХ: $x(t) = x_0 \pm vt$

Равноускоренное движение

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Равноускоренное движение вдоль ОХ:

$$x(t) = x_0 \pm v_0t \pm \frac{at^2}{2} \quad v_0, a - \text{модули векторов скорости и ускорения.}$$

$$v(t) = \pm v_0 \pm at$$

Равноускоренное прямолинейное движение

Задача 6. Автомобиль начинает двигаться с ускорением $a = 2 \text{ м/с}^2$. Определите промежутки времени Δt_1 и Δt_2 , за которые автомобиль проедет первые и вторые $l = 100 \text{ м}$ пути.

Решение.

$$x = \frac{at^2}{2}$$

$$x_1 = l = \frac{a\Delta t_1^2}{2} \rightarrow \Delta t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a}} = 10 \text{ с}$$

$$\Delta t_2 = t_2 - t_1 \quad t_2 \rightarrow x_2 = 2l$$

$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{4l}{a}} - \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{a}} (\sqrt{2} - 1) \approx 4,1 \text{ с.}$$

Задача 7. Мяч бросили вертикально вверх со скоростью $v_0 = 5$ м/с с высоты $h = 1,5$ м.

Определите: 1) время полета мяча до его падения на землю $t_{\text{пол}}$; 2) максимальную высоту подъема h_{max} ; 3) конечную скорость $v_{\text{к}}$.

Решение.

$$y = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$v_y = v_0 - gt$$

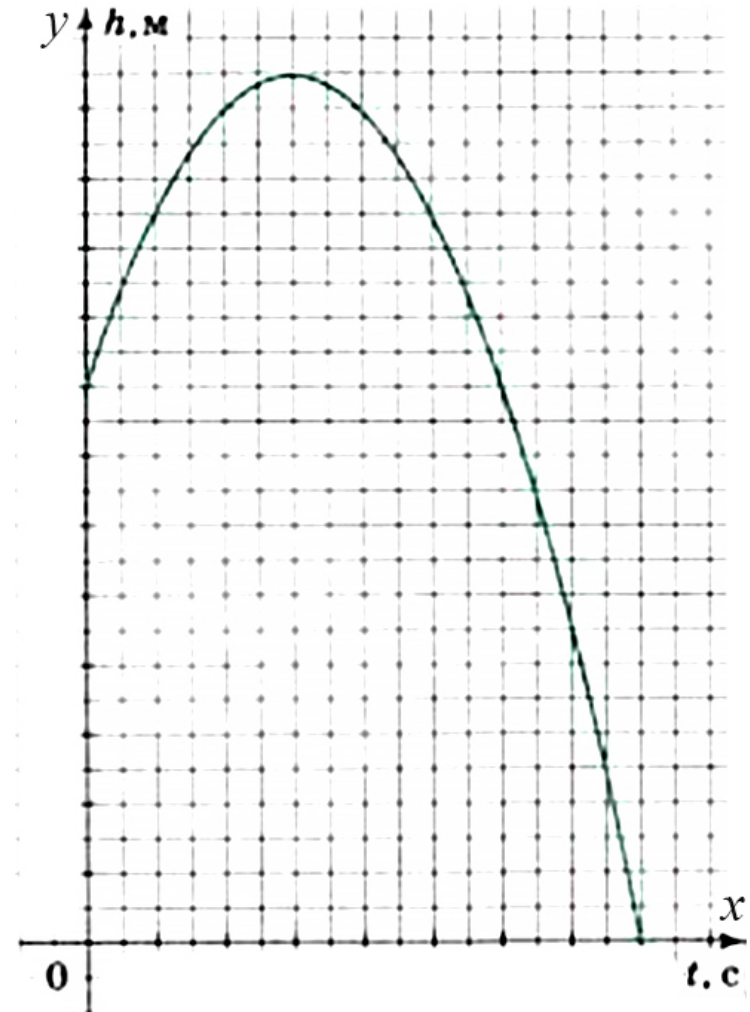
$$1) 0 = h + v_0 t_{\text{пол}} - \frac{gt_{\text{пол}}^2}{2} \rightarrow t_{\text{пол}1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

$$t_{\text{пол}} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} = 0,75 \text{ с}$$

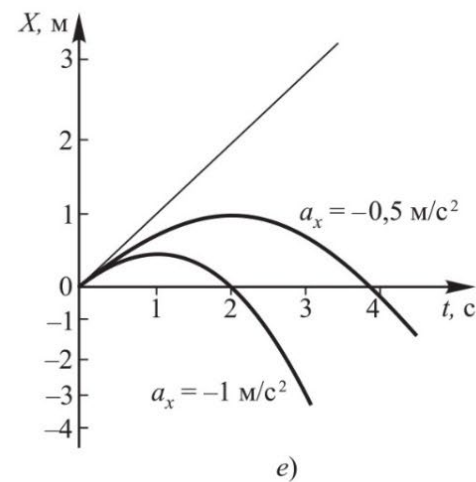
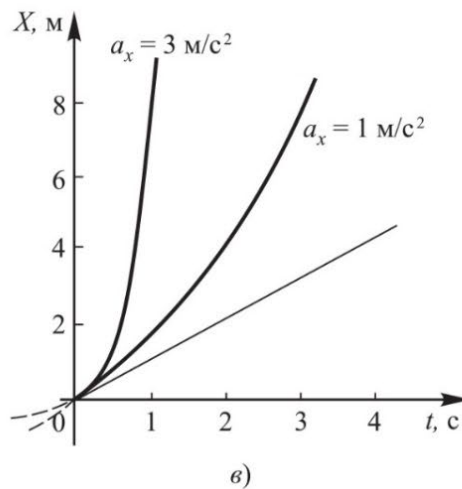
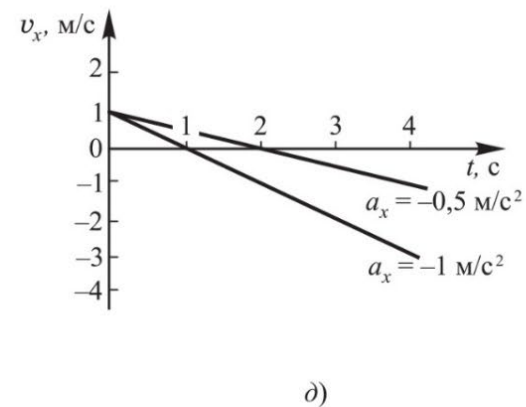
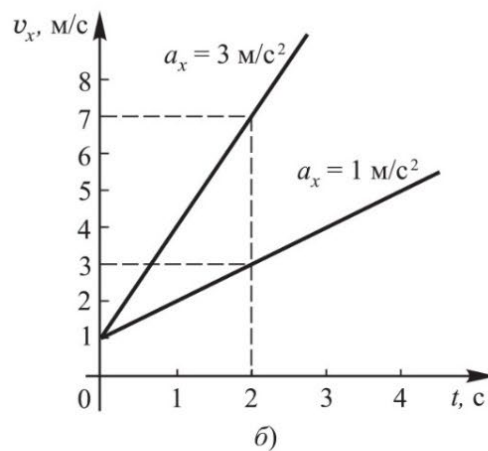
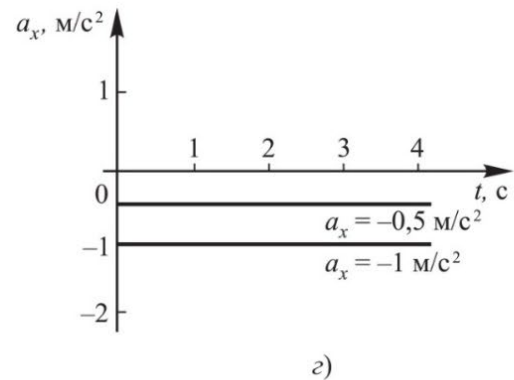
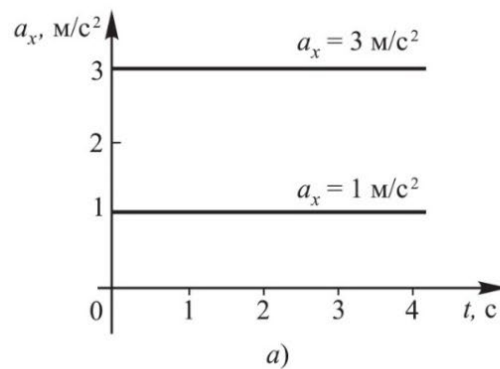
$$2) 0 = v_0 - gt_{\text{под}} \rightarrow t_{\text{под}} = v_0 / g$$

$$h_{\text{max}} = h + \frac{v_0^2}{2g} = 2,8 \text{ м}$$

$$3) v_{\text{ук}} = v_0 - gt_{\text{пол}} = -\sqrt{v_0^2 + 2gh} = -7,4 \text{ м/с.}$$



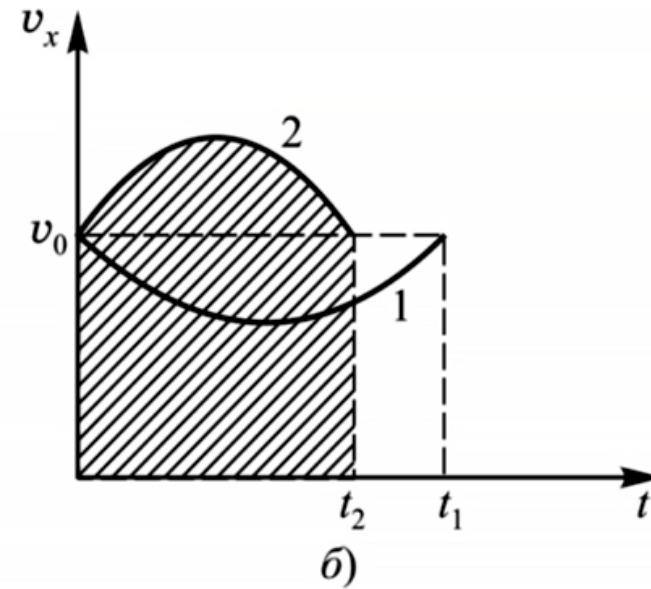
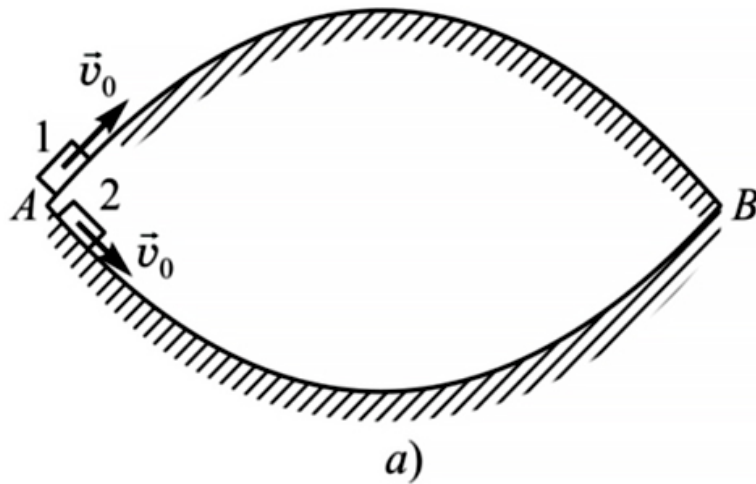
Графики зависимости кинематических величин при разных значениях ускорения



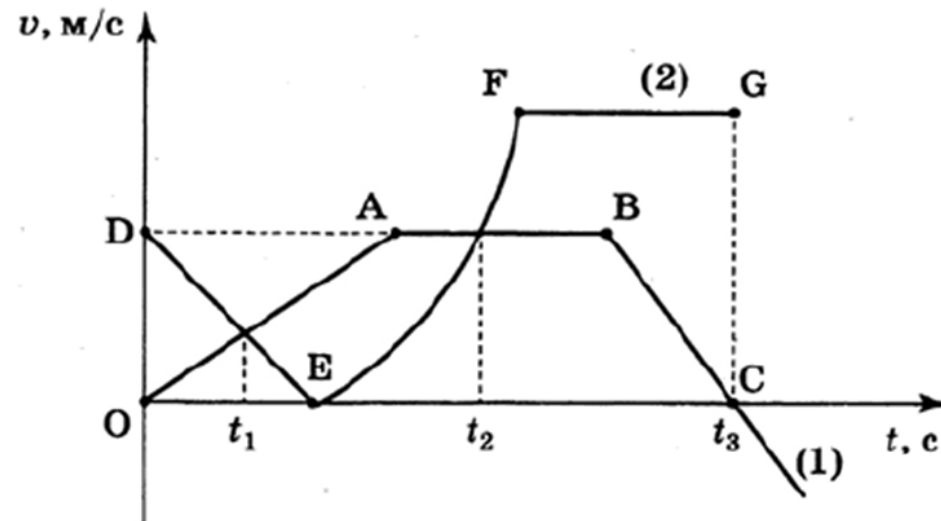
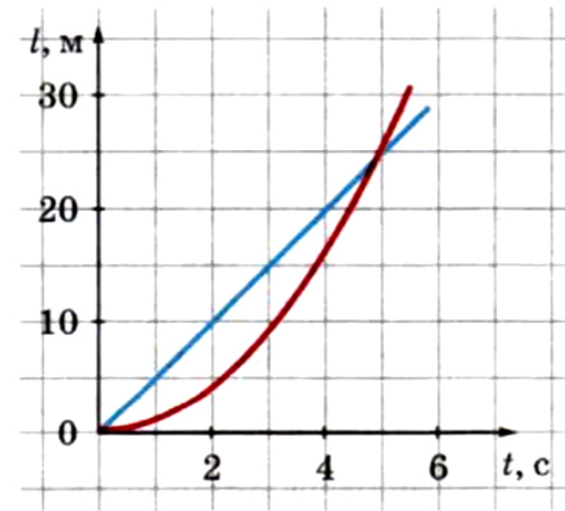
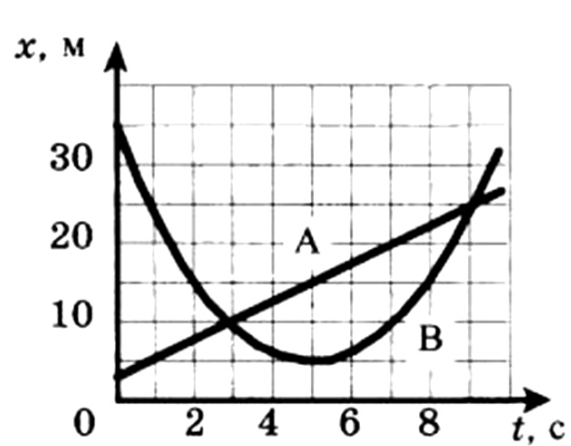
Графический метод решения

Вопрос: два тела одновременно начинают двигаться по разным траекториям. Окажутся ли они одновременно в точке В?

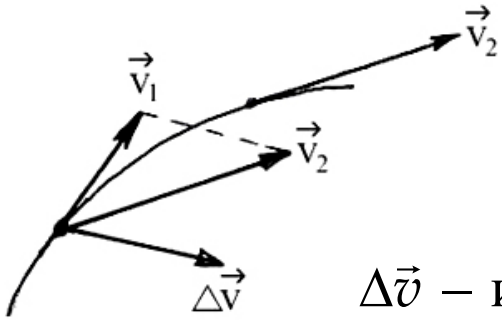
Графики зависимости скорости от времени



Описать движения, определить место и время встречи двух тел



Движение тела по криволинейной траектории



$\Delta \vec{v}$ – изменение скорости;

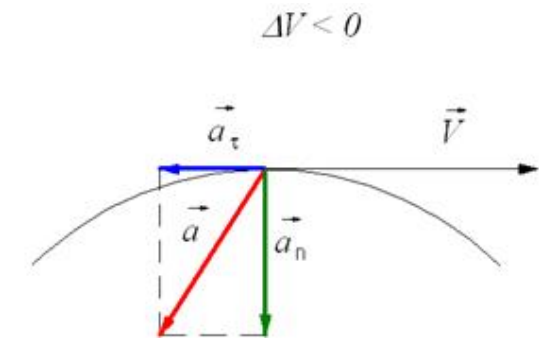
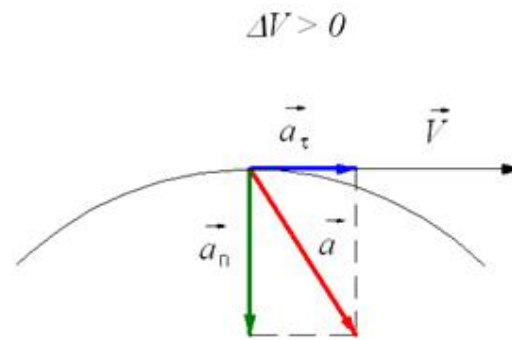
\vec{a} – полное ускорение;

a_τ – тангенциальное (a_k – касательное) ускорение, направлено по касательной к траектории и характеризует изменение скорости по модулю;

a_n – нормальное ($a_{цс}$ – центростремительное) направлено к центру кривизны траектории (по нормали к скорости), характеризует изменение скорости по направлению, $a_n = v^2 / R$, где – мгновенная скорость.

R – радиус кривизны траектории в данной точке.

Модуль мгновенного ускорения равен: $a_{\text{МГН}} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.



Движение по окружности

Задача 8. Определите полное ускорение автомобиля в конце поворота радиусом 10 м на угол 90° . Скорость в начале поворота $v_1 = 72$ км/ч, в конце поворота $v_2 = 36$ км/ч. Считать касательное ускорение постоянным.

Решение.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

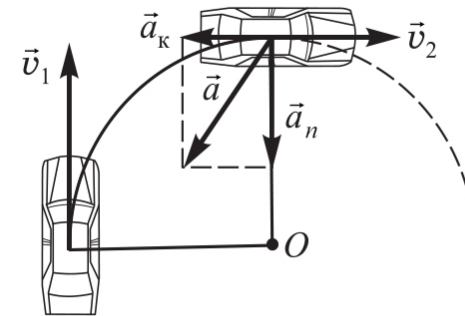
$$a_\tau = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v_2 - v_1}{t}$$

$$L = \frac{\pi r}{2} = v_1 t - \frac{a_\tau t^2}{2} \quad v_2 = v_1 - a_\tau t$$

$$t = (v_1 - v_2) / a_\tau \rightarrow L = (v_1^2 - v_2^2) / 2a_\tau$$

$$a_\tau = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2L} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{\pi r} \quad a_n = v_2^2 / r$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{\pi r}\right)^2 + \frac{v_2^4}{r^2}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{(v_1^2 - v_2^2)^2}{\pi^2} + v_2^2}$$



Движение с постоянным ускорением – движение тела, брошенного под углом к горизонту

Задача 9. Из окна, находящегося на высоте $h = 3$ м, мальчик бросает мяч со скоростью $v_0 = 5$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. На каком расстоянии от дома упадет мяч?

Решение.

$$x = v_0 \cos \alpha t$$

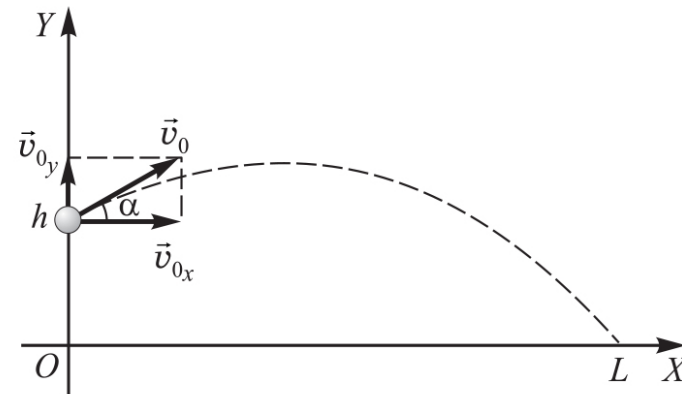
$$y_0 = h; \quad a_y = -g$$

$$y = h + v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}$$

$$L = v_0 \cos \alpha t_{\text{пол}}$$

$$0 = h + v_0 \sin \alpha t_{\text{пол}} - \frac{gt_{\text{пол}}^2}{2}$$

$$L = v_0 \cos \alpha \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g} = 1,1 \text{ м.}$$



Задача 10. На наклонную плоскость длиной $L = 20$ м и с углом у основания $\alpha = 45^\circ$ с высоты $h = 1,7$ м падает мяч. Считая удар мяча о плоскость абсолютно упругим, определите сколько раз он ударится о наклонную плоскость прежде чем соскочит с нее?

Решение.

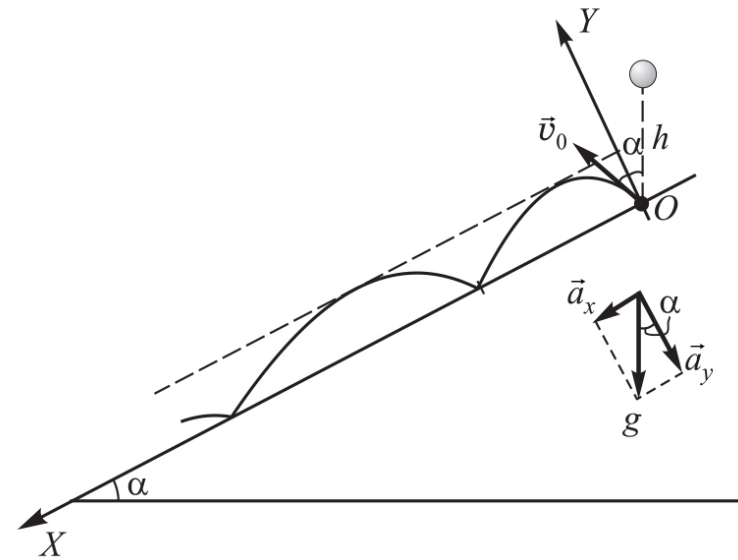
$$h = \frac{gt_{\text{пад}}^2}{2} \quad v_0 = v_k = \sqrt{2gh}$$

$$a_x = g \sin \alpha, \quad a_y = -g \cos \alpha$$

$$x = v_0 \sin \alpha t + \frac{g \sin \alpha t^2}{2}$$

$$y = v_0 \cos \alpha t - \frac{g \cos \alpha t^2}{2}$$

$$\Delta t = 2v_0 / g$$



$$t_{\text{пол}} = n\Delta t$$

$$L = v_0 \sin \alpha \frac{2v_0}{g} n + \frac{g \sin \alpha}{2} \left(\frac{2v_0}{g} n \right)^2 = \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g} (n + n^2)$$

$$n^2 + n - \frac{gL}{2v_0^2 \sin \alpha} = 0$$

$$n = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{gL}{2v_0^2 \sin \alpha}}$$

$$n = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{2gL}{v_0^2 \sin \alpha}}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{2gL}{2gh \sin \alpha}}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{L}{h \sin \alpha}}}{2} = 2$$

Задача 11. Тело брошено со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Определите, на какой высоте касательное (тангенциальное) ускорение тела станет равным его центростремительному (нормальному) ускорению?

Решение.

$$\beta = 45^\circ \quad \text{В т. } A \quad a_n = a_\tau \quad v_x = v_y$$

$$v_x = v_A \cos \beta = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_A \sin \beta$$

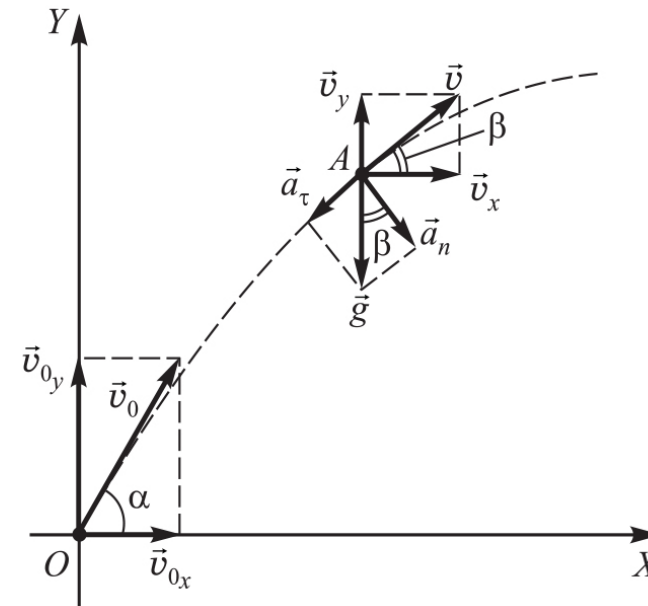
$$t_A = v_0 (\sin \alpha - \cos \alpha) / g$$

Уравнение движения

$$x = (v_0 \cdot \cos \alpha)t$$

$$y = v_0 \cdot \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}$$

$$h = \frac{v_0^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{2g} = -\frac{v_0^2 \cos 2\alpha}{2g} = 2,6 \text{ м.}$$



Движение по окружности, угловая скорость

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$|\Delta\vec{s}_1| \neq |\Delta\vec{s}_2|$$

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$$

При равномерном движении по окружности

$$\omega = \Delta\varphi / \Delta t = \frac{\varphi - \varphi_0}{\Delta t} \rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

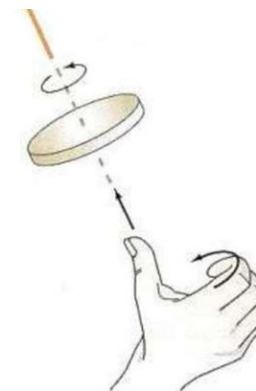
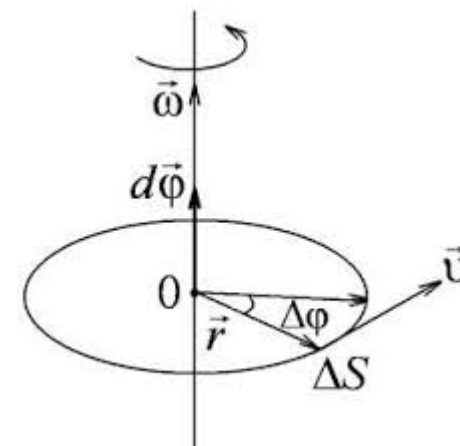
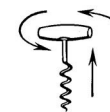
$\vec{\omega}$ – угловая скорость, векторная величина,
направлена вдоль оси вращения (аксиальный вектор).

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \text{ – мгновенная скорость } \varphi - \varphi_0 = \pm \int_0^t \omega dt$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow v = \omega r$$

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$$

Направление угловой скорости определяется
по правилу правой руки или по правилу буравчика.



Угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$$

Ось вращения постоянна

Уравнение движения ($\vec{\varepsilon} = \text{const}$)

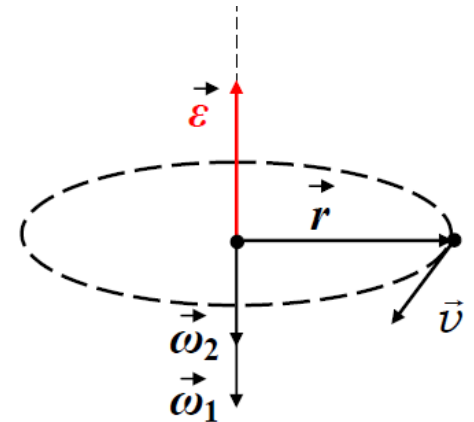
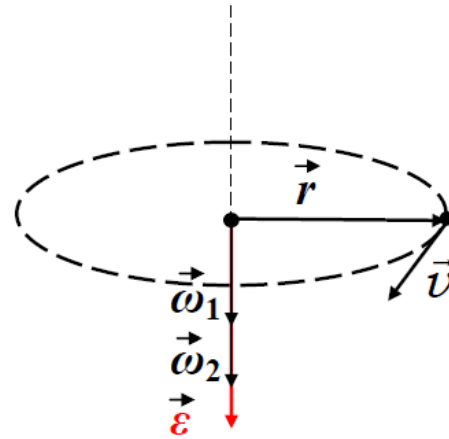
$$\varphi = \varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\omega = \pm \omega_0 \pm \varepsilon t$$

Связь тангенциального и линейного ускорений

$$a_\tau = r\varepsilon$$

$$a_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$



Задача 12. Угол поворота диска радиусом 10 см изменяется по закону:
 $\varphi = 4 + 2t - t^3$ Определите значение и направление угловой скорости
и углового ускорения в разные моменты времени. Определите линейную
скорость на ободе диска в момент времени равный 10 с.

Решение.

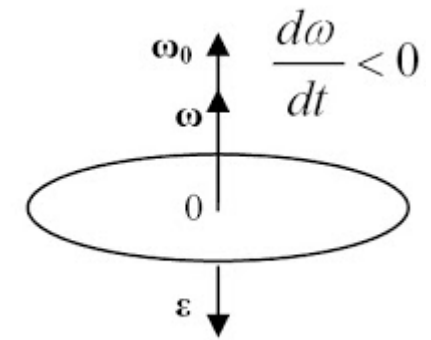
$$\omega = \varphi' = \frac{d\varphi}{dt} = 2 - 3t^2$$

$$2 - 3t^2 = 0 \quad t = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ с} \text{ — изменение направления вращения}$$

$$\varepsilon = \omega' = -6t$$

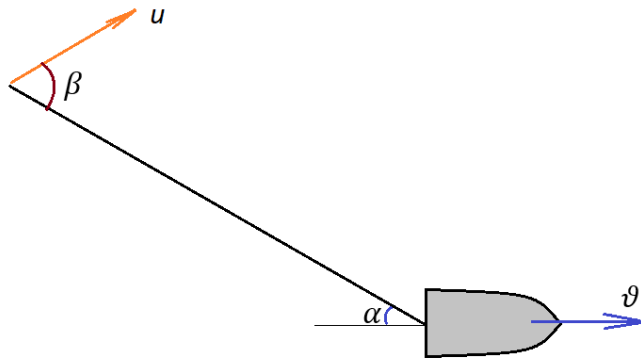
$$v = \omega R = (2 - 3t^2)R$$

$$v = (2 - 3)0,1 \text{ м/с} = -0,1 \text{ м/с}.$$



1. Задачи со связями

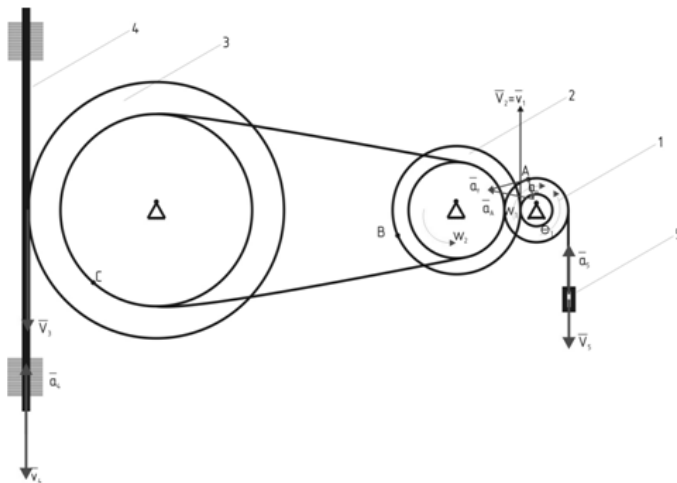
Определите отношение скоростей лыжника и катера, u – скорость лыжника, v – скорость катера.



$$v \cos \alpha = u \cos \beta$$

$$\frac{v}{u} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

Определите соотношение угловых скоростей трех дисков

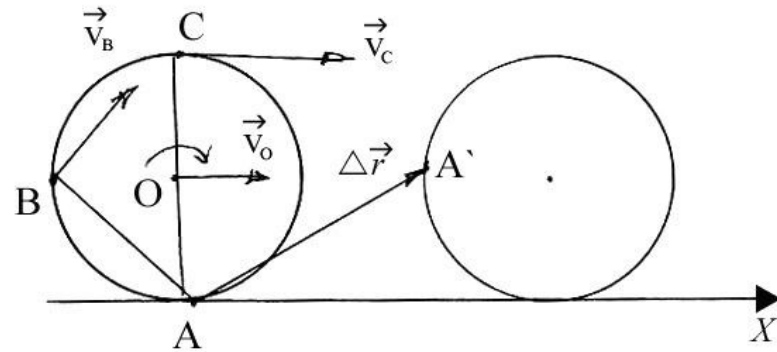


$$R_1 > R_2 > R_3$$

$$v = \text{const}$$

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 = \omega_3 R_3$$

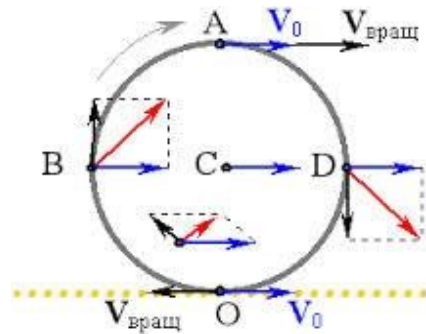
Решение задач о движении колеса с помощью введения мгновенной оси вращения



A – мгновенная ось вращения ω

$$\omega = \frac{v_O}{R}$$

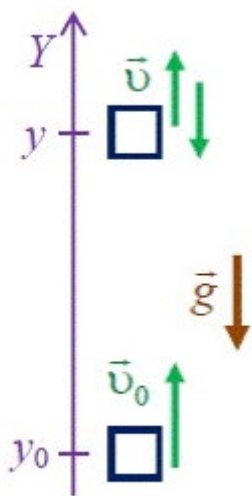
$$v_C = \omega (AB)$$



Пример решения задачи с системой тел

Задача 13. Один за другими вертикально вверх из одной точки сделаны два выстрела. Скорость пули при выстреле $v_0 = 200$ м/с. Промежуток времени между выстрелами $\tau = 1$ с. Через какое время пули окажутся на одной высоте и чему равна эта высота? Определите также относительную скорость пуль при полете.

Решение.



$$y_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$y_2 = v_0(t - \tau) - \frac{g(t - \tau)^2}{2}$$

$$y_1 = y_2 \quad v_0 t_s - \frac{gt_s^2}{2} = v_0(t_s - \tau) - \frac{g(t_s - \tau)^2}{2}$$

$$t_B = \frac{v_0 + \frac{g\tau}{2}}{g} \quad h = v_0 \frac{v_0 + \frac{g\tau}{2}}{g} - \frac{g}{2} \left(\frac{v_0 + \frac{g\tau}{2}}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 - \left(\frac{g\tau}{2} \right)^2}{2g}$$

$$v_1 = v_0 - gt; \quad v_2 = v_0 - g(t - \tau) \rightarrow g\tau$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Автомобиль проехал из одного пункта в другой $1/2$ часа, двигаясь равномерно, а следующие 10 минут – равно замедленно до полной остановки. Длина пути 20 км. Определите скорость (км/ч) равномерного движения.
2. Одну треть пути велосипедист ехал со скоростью 36 км/ч, а остальной путь, равный 300 м, проходит пешком за 2,5 мин. Определите среднюю скорость движения велосипедиста.
3. За какое время велосипедист догонит пешехода, идущего со скоростью 1,7 м/с, вышедшего на 1 час раньше велосипедиста? Скорость велосипедиста 18 км/ч, движение происходит из одного пункта.
4. Камень падает с высоты 20 м. Определите промежутки времени, за которые камень пролетит первые и вторые 10 м пути.
5. Конькобежец в течение 3 с движется прямолинейно с постоянным ускорением 4 м/с^2 , затем проходит равномерно расстояние 36 м, а после этого в течение 6 с движется равнозамедленно. Определите путь, который проехал конькобежец .

6. Даны следующие уравнения движения двух тел, которые можно считать материальными точками: $x_1 = A + Bt + Ct^2$, $x_2 = Dt + Et^2$ $A = 5$ м, $B = -3$ м/с, $C = 8$ м/с², $D = 4$ м/с, $E = 6$ м/с². Напишите выражения, представляющие зависимости скорости v_x от времени, определите значения скоростей в момент времени $t = 2$ с, а также скорость первого тела относительно второго в этот момент времени.

7. Мальчик на роликах отталкивается и едет с начальной скоростью 4 м/с вдоль прямой, причем его скорость за время 3 с возрастает на 6 м/с. Напишите уравнение его движения.

8. Камень свободно падает без начальной скорости с высоты 19,6 м. Вычислите среднюю скорость падения.

9. Под каким углом к горизонту нужно бросить тело, чтобы высота его подъема была в два раза больше дальности его полета?

10. Колесо застрявшей в грязи машины вращается со скоростью 2 об/с. Радиус колеса 60 см. Определите, на каком расстоянии от центра колеса должен стоять человек, чтобы в него не попадали комья грязи.

11. Вычислите угловую и линейную скорости орбитального движения спутника Земли, если период его обращения 121,16 мин, а высота полета 1700 км.

12. Между двумя параллельными горизонтальными досками находится бревно. Доски движутся со скоростями v_1 и v_2 , которые в одном случае направлены в одну сторону, а в другом – в противоположные стороны. Какова скорость перемещения центра бревна?

13. Скорость обода колеса изменяется по закону: $v = 2 + 5t$. Радиус колеса равен 20 см. Определите угловую скорость, угловое ускорение, а также нормальное и тангенциальное ускорения точки на ободу колеса. Сколько оборотов сделает колесо за 10 с?